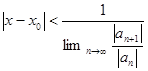
**12.Равномерная сходимость степенного ряда внутри интервала сходимости.**Теорема. Степенной ряд равномерно сходится внутри интервала сходимости.  
Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.

Зафиксируем некоторое значение x и запишем ряд из модулей членов степенного рядаhttp://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1821.png. Это – знакоположительный числовой ряд. Применим к нему признак Даламбера или радикальный признак Коши.  
Применяя признак Даламбера, имеем  
http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1823.png. Отсюда .

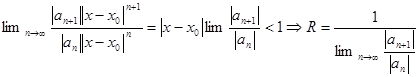
Поэтому http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1827.png.  
Применяя радикальный признак Коши, имеем  
http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1829.png.  
Так определяется радиус сходимости степенного ряда.  
Затем исследуется сходимость ряда на границе интервала сходимости, в точках http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1831.pngЭти точки подставляются в исходный ряд, ряд становится обычным числовым рядом и исследуется стандартными методами для числовых рядов.  
Пример. http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1833.png.  
Составим ряд из модулей http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1835.png, применим радикальный признак Коши http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1837.png.

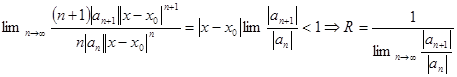
Радиус сходимости R=5, интервал сходимости (-2, 8). Исследуем сходимость ряда на границе, подставляя точки x= -2, в исходный ряд..

В точке x = -2 имеем ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1839.png- гармонический ряд, он расходится.

В точке x = 8 имеем ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1841.png- сходящийся (по признаку Лейбница) знакочередующийся ряд.  
Область сходимости исходного ряда (-2, 8].  
Доказательство. Пусть http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1843.png. Выберем http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1845.png, например http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1847.png. На интервале http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1849.pngи в точке x1 степенной ряд сходится абсолютно, так как этот интервал лежит внутри интервала сходимости. Тогда (точно так же, как в доказательстве теоремы Абеля оценим http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1851.png,

где http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1853.png(http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1855.pngне зависит от http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1857.png).  
Тогда в области http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1859.pngстепенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса (члены ряда мажорируются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии).  
Следствие.Внутри интервала сходимости справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и дифференцировании ряда.  
Теорема.При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.  
Доказательство. Рассмотрим ряд из модулей членов степенного ряда (это – знакоположительный числовой ряд в конкретной точке) и определим радиус сходимости по признаку Даламбера.

.  
Продифференцируем почленно степенной ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1863.png, перейдем к ряду из модулей и найдем радиус сходимости по признаку Даламбера.

.  
Таким образом, при почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется. Он не меняется и при почленном интегрировании, иначе он изменился бы при почленном дифференцировании.  
**Теорема о непрерывности суммы ряда.**  
Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.  
Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.  
Пусть члены функционального ряда http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1664.pngможно мажорировать (ограничить по модулю) в области V членами сходящегося числового знакоположительного ряда, http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1702.png.  
Тогда функциональный ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1662.pngравномерно сходится в области V.  
Доказательство. Так как числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1704.pnghttp://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1706.png(ряд знакоположителен, http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1708.png).

Тогда http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1710.png

http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1712.png.  
Следовательно, выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1662.pnghttp://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image138.pngсходится в области V равномерно.  
Пример. Ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1714.pngсходится равномерно в R, так как http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1716.png- сходящийся числовой ряд.  
Пусть члены http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1664.pngфункционального ряда http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1662.png- непрерывные функции в точке http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1718.png- внутренней точке области V. Пусть ряд http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1662.pngсходится равномерно в области V. Тогда сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1720.png.   
Доказательство. Так как ряд сходится равномерно в V, то

http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1722.png.  
Так как http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1664.png- непрерывные функции в точке http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1718.png, то и http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1724.pngнепрерывна в http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1718.pngкак сумма конечного числа непрерывных функций.  
Зафиксируем n>N. По непрерывности http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1724.pnghttp://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1726.png.  
Оценим http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1728.png

http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1730.png.

Итак http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1732.png, то есть сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке http://ok-t.ru/life-prog/baza1/100122045757.files/image1720.png.